

Οι φυσικοί αριθμοί

Φυσικοί Αριθμοί

Είναι οι αριθμοί με τους οποίους δηλώνουμε πλήθος ή σειρά. Για παράδειγμα, φυσικοί αριθμοί είναι οι:

0, 1, 2, 3, ..., 99, 100, ..., 999, 1000, 2022....

Χωρίζουμε τους Φυσικούς αριθμούς σε δύο σύνολα:

- Τους άρτιους (ζυγοί): δηλαδή όσοι αριθμοί διαιρούνται με το 2.
- Τους περιττούς (μονοί): όσοι αριθμοί δεν διαιρούνται με το 2.

Θυμόμαστε:

- Κάθε φυσικός έχει έναν επόμενο και έναν προηγούμενο αριθμό.

Εξαιρέση το 0 που έχει μόνο επόμενο αριθμό, το 1.

- Μπορούμε πάντα να συγκρίνουμε δύο φυσικούς αριθμούς.

- Γράφοντας $1 < 2$ εννοούμε "το 1 είναι μικρότερο του 2".
- Γράφοντας $10 > 9$ εννοούμε "το 10 είναι μεγαλύτερο του 9".

Στρογγυλοποίηση Αριθμών

Αν το ψηφίο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι 0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4, αφήνουμε τον αριθμό όπως είναι μέχρι την τάξη που γίνεται η στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδενικά όλα τα επόμενα ψηφία του.

Αν το ψηφίο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι 5 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9, αυξάνουμε κατά μία μονάδα το ψηφίο της τάξης που γίνεται στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδενικά τα επόμενα ψηφία του αριθμού.

Παράδειγμα

Ο αριθμός 9.573.842 θα στρογγυλοποιηθεί (στις εκατοντάδες) σε 9.573.800 ενώ ο ίδιος αριθμός θα στρογγυλοποιηθεί (στις χιλιάδες) σε 9.574.000

Θυμόμαστε Τις Πράξεις...

• **Πρόσθεση:** Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται άθροισμα των αριθμών αυτών και οι αριθμοί που προστίθενται λέγονται προσθετέοι. Παράδειγμα: $112 + 221 = 333$

• **Αφαίρεση:** Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης δυο αριθμών λέγεται διαφορά και οι αριθμοί που αφαιρούμε λέγονται ο πρώτος Μειωτέος (Μ) και ο δεύτερος Αφαιρετέος (Α). Δηλαδή ισχύει: αν $M - A = \Delta$ τότε $A + \Delta = M$.

▪ **Θυμάμαι:** Για να είναι δυνατή η αφαίρεση στους φυσικούς αριθμούς θα πρέπει ο μειωτέος να είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αφαιρετέο.

• **Πολλαπλασιασμός:** Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο αριθμών λέγεται γινόμενο, ενώ οι αριθμοί λέγονται παράγοντες του γινομένου.

▪ **Θυμάμαι:** πρώτα κάνω τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις προσθέσεις κι αφαιρέσεις.

Δυνάμεις Αριθμών

Αν έχω να πολλαπλασιάσω έναν αριθμό a με τον εαυτό του πολλές φορές, τότε αυτό λέγεται νιοστή δύναμη του a .

Ονομάζουμε νιοστή δύναμη του a (ή νιοστή δύναμη με βάση το a), ένα γινόμενο από n παράγοντες ίσους με τον a . Δηλαδή:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

Θυμάμαι...

• Το a^2 λέγεται και <<τετράγωνο του a >>.

• Το a^3 λέγεται και <<κύβος του a >>.

• Ορίζουμε: $a^0 = 1$ και $a^1 = a$.

Αριθμητική Παράσταση

Κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται με τα σύμβολα των πράξεων.

Παραδείγματα:

$$A = 1 + 2 \cdot 3 - 4 + 3^2$$

$$A = 3 \cdot 4 + 6^3 \cdot 4 - 2$$

Τιμή της αριθμητικής παράστασης, είναι το αποτέλεσμα που βρίσκουμε όταν εκτελέσουμε τις πράξεις που είναι σημειωμένες στην αριθμητική παράσταση.

Προσοχή!

Προτεραιότητα Των Πράξεων

Η σειρά με την οποία κάνουμε τις πράξεις που υπάρχουν σε μια αριθμητική παράσταση, για να βρούμε την τιμή της, είναι πολύ σημαντική και γίνεται με συγκεκριμένους κανόνες!

Κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (αν υπάρχουν), και στη συνέχεια τις πράξεις στην αριθμητική παράσταση που προκύπτει σύμφωνα με την παρακάτω σειρά:

1. Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.

2. Μετά κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με την σειρά που σημειώνονται.

3. Τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις με την σειρά που σημειώνονται.

Θυμάμαι...

• Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις γίνονται με την ίδια σειρά βημάτων (Δυνάμεις → Πολλα/σμοί/Διαιρέσεις → Προσθ/αφαιρέσεις).

• Αν δεν τηρήσουμε την προτεραιότητα των πράξεων, θα φτάσουμε σε λάθος τιμή της παράστασης!

Επιμεριστική Ιδιότητα

Για τρεις αριθμούς a, b και γ , ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα, που συνδυάζει την πρόσθεση (ή αφαίρεση) με τον πολλαπλασιασμό:

$$a(b + \gamma) = ab + a\gamma \quad \text{ή} \quad ab + a\gamma = a(b + \gamma)$$

και

$$a(b - \gamma) = ab - a\gamma \quad \text{ή} \quad ab - a\gamma = a(b - \gamma)$$

Ευκλείδεια Διαίρεση

Θυμάμαι...

Διαίρεση λέμε την πράξη με την οποία όταν δίνονται δυο αριθμοί, ο Δ (διααιρετέος) και ο δ (διαιρέτης), βρίσκουμε έναν αριθμό π (πηλίκο), ο οποίος όταν πολλαπλασιαστεί με τον διαιρέτη δίνει γινόμενο το διααιρετέο. Δηλαδή:

$$\Delta : \delta = \pi, \text{ όταν: } \Delta = \delta\pi .$$

Ευκλείδεια διαίρεση λέγεται η διαδικασία κατά την οποία, όταν δίνονται δυο φυσικοί αριθμοί, ο Δ (διααιρετέος) και ο δ (διαιρέτης), βρίσκουμε δύο άλλους φυσικούς αριθμούς, τον αριθμό π (πηλίκο) και τον αριθμό ν (υπόλοιπο) ώστε να είναι:

$$\Delta = \delta\pi + \nu \text{ και } \nu < \delta.$$

Προσοχή στα εξής:

- Ο διαιρέτης δ δεν μπορεί ποτέ να είναι μηδέν: $\delta \neq 0$
- $a : a = 1$ γιατί $a = a \cdot 1$
- $a : 1 = a$ γιατί $a = 1 \cdot a$
- $0 : a = 0$ γιατί $0 = a \cdot 0$

Τέλεια Διαίρεση

Αν το υπόλοιπο ν της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι μηδέν, τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια. Δηλαδή, στην τέλεια διαίρεση έχουμε $\Delta : \delta = \pi$ και οι Δ , δ , π , είναι φυσικοί αριθμοί.

Στην περίπτωση αυτή ο Δ είναι πολλαπλάσιο του δ (γιατί $\Delta = \delta\pi$).
Λέμε επίσης ότι ο δ είναι διαιρέτης του Δ .

Η τέλεια διαίρεση είναι αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.

Πολλαπλάσια

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού ονομάζουμε τους αριθμούς που βρίσκουμε όταν τον πολλαπλασιάσουμε με όλους τους φυσικούς αριθμούς: $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Παραδείγματα:

Πολλαπλάσια του 3 είναι οι αριθμοί: 3, 6, 9, 12, 15, και.

Πολλαπλάσια του 4 είναι οι αριθμοί: 4, 8, 12, 16, 20, και.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο φυσικών αριθμών α και β το συμβολίζουμε με ΕΚΠ (α, β) και είναι το μικρότερο μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών.

Παραδείγματα:

$$\text{ΕΚΠ}(4, 2) = 4 \qquad \text{ΕΚΠ}(6, 7) = 42 \qquad \text{ΕΚΠ}(11, 22) = 22$$

$$\text{ΕΚΠ}(10, 2) = 10 \qquad \text{ΕΚΠ}(20, 5) = 100 \qquad \text{ΕΚΠ}(8, 32) = 32$$

Διαιρέτες

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού είναι οι φυσικοί αριθμοί που τον διαιρούν.

- Το 1 είναι διαιρέτης όλων των αριθμών
- Το 0 είναι πολλαπλάσιο όλων των αριθμών

Παραδείγματα:

Διαιρέτες του 26 είναι το 1, το 2, και το 13.

Διαιρέτες του 20 = { 1, 2, 4, 5, 10 }

Διαιρέτες του 32 = { 1, 2, 4, 8, 16 }

Διαιρέτης του 29 είναι μόνο το 1.

Πρώτοι Αριθμοί

Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται μόνο με το εαυτό του και την μονάδα λέγεται πρώτος.

- Οι αριθμοί που δεν είναι πρώτοι λέγονται σύνθετοι.
- Αν δύο αριθμοί έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη την μονάδα λέγονται πρώτοι μεταξύ τους.

Παραδείγματα:

Οι 13 και 15 είναι πρώτοι μεταξύ τους, γιατί $ΜΚΔ(13,15) = 1$.

Οι 29 και 3 είναι πρώτοι μεταξύ τους, γιατί $ΜΚΔ(29,3) = 1$.

Θυμάμαι...

Ένα φυσικός αριθμός διαιρείται με το:

- 2 αν το γηφίο των μονάδων είναι: 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8.
- 3 ή το 9, αν το άθροισμα των γηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.
- 5 αν τελειώνει σε 0 ή 5.

Τυποποιημένη Μορφή Μεγάλων Αριθμών

Ένας «μεγάλος αριθμός», A , στην τυποποιημένη μορφή γράφεται σαν γινόμενο ενός αριθμού a (φυσικού ή δεκαδικού) που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1 και μικρότερος του 10, επί μια δύναμη του 10. Δηλαδή

$$A = a \cdot 10^r \quad \text{όπου } a \text{ μεγαλύτερος ή ίσος του 1 και μικρότερος του 10.}$$

Παραδείγματα

$$10000 = 1 \cdot 10^5$$

$$1203 = 1,203 \cdot 10^4$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ομάδα

8. Να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων φυσικών αριθμών.

9. Να γράψετε τους άρτιους αριθμούς που περιέχονται ανάμεσα στο 8 και το 17.

10. Πόσοι είναι οι διψήφιοι αριθμοί με πρώτο ή τελευταίο ψηφίο 5;

11. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος τριψήφιος αριθμός με ψηφία διαφορετικά μεταξύ τους;

12. Έχουμε ένα βιβλίο 156 σελίδων. Αν θέλουμε να αριθμήσουμε τις σελίδες του, πόσα ψηφία θα χρησιμοποιήσουμε;

13. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί α) 21513 β) 5362 γ) 290375
 ι) στο πλησιέστερο δέκατο.
 ιι) στην πλησιέστερη δεκάδα.
 ιιι) στη πλησιέστερη εκατοντάδα.

14. Να γράψετε τα πολλαπλάσια του 7 που βρίσκονται ανάμεσα στο 50 και το 100.

15. Να γράψετε πιο σύντομα τις παραστάσεις:

$$A = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_4, B = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_5, \Gamma = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_7$$

16. Να υπολογισθούν οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

$$A = 3^2 + (5 + 3)^2 + 3 \cdot 5^2 - 3 \cdot (5 + 2)^2$$

$$B = (25 : 5 + 3 \cdot 3) : 2 + 7 - 5^2 \cdot 2$$

17. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών: 18, 48.

Β' ομάδα

1. Δίνονται οι αριθμοί: 375, 2955, 3148, και 2925. Εξετάστε ποιοι διαιρούνται με το 2, ποιοι με το 3, ποιοι με το 5 και ποιοι με το 9.

2. Αν $a=5$, $b=3$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$A=(a+b)^2 \quad \text{και} \quad B=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$$a) \quad 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 7^2 + (3 \cdot 2^2) \cdot 3$$

$$b) \quad 3(2 \cdot 5 + 3 \cdot 5) + 10^2 + 2(3 + 1)$$

4. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ισότητες προκύπτουν από ευκλείδειες διαιρέσεις :

$$a) \quad 328 = 13 \cdot 25 + 3, \quad b) \quad 532 = 20 \cdot 25 + 32, \quad \gamma) \quad 70 = 7 \cdot 9 + 7, \quad \delta) \quad 64 = 8 \cdot 7 + 8$$

5. Ένας φυσικός αριθμός Δ , όταν διαιρείται με τον αριθμό δ , αφήνει υπόλοιπο 2. Ενώ, αν ο Δ διαιρείται με το 4, αφήνει υπόλοιπο δ .

A) Να βρεθεί ο αριθμός δ .

B) Να βρεθεί ο μικρότερος απ' τους αριθμούς Δ .

6. Μπορείς να βρεις με 20 χαρδένιες, με 24 χαρύφαλλα και 28 τριαντάφυλλα, πόσα ομοιόμορφα μπουνιέτα μπορούμε να φτιάξουμε; (Όσο γίνεται πιο πολλά). Ποια είναι η σύνθεση του κάθε μπουνιέτου;

7. Το τριπλάσιο ενός φυσικού αριθμού είναι ίσο με τον αριθμό αυξημένο κατά 4. Ποιος είναι ο φυσικός αριθμός; Να λύσετε το πρόβλημα με διαδοχικές δοκιμές.

8. Ένας έμπορος αγόρασε 80 εξάδες ποτήρια προς 12 ευρώ την εξάδα. Τα πούλησε με το κομμάτι προς 3 ευρώ το ένα. Να βρείτε πόσα κέρδισε, αν του έσπασαν και 5 ποτήρια.